Gleiche Abstände in ebenen Punktmengen

Harborth, Heiko

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1993 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.105-106

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

HEIKO HARBORTH, Braunschweig

Gleiche Abstände in ebenen Punktmengen

Hannover, 14. Mai 1993*

Kann man n Punkte in der Ebene so finden, daß alle $n = (n^2 - n)/2$ paarweise Abstände gleich lang sind? Für $n \leq 3$ Punkte ist dieses leicht möglich. Für $n = 4$ hat nur ein Punkt in der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks den gleichen Abstand zu allen drei Eckpunkten. Da dieser Abstand ungleich der Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ist, können also höchstens fünf Abstände bei vier Punkten gleich sein, wie etwa bei zwei gleichseitigen Dreiecken, die eine Seite gemeinsam haben.

Wird nun mit f(n) die maximale Anzahl von gleichen Abständen für n Punkte in der Ebene bezeichnet, so ist es überraschend, daß bis heute nur die weit voneinander entfernten Abschätzungen

$$n^{1+c_1/\log\log n} < f(n) < c_2 n^{4/3}$$

mit Konstanten c_1 und c_2 bekannt sind. Die wahre Größenordnung von f(n) wird von P. Erdös seit 1946 bei der unteren Abschätzung vermutet, und er bietet 500 U. S.-Dollar für einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Für $n \leq 14$ sind die exakten Werte von f(n) kürzlich gemeinsam mit C. Schade bestimmt worden, und es gilt etwa $f(14) = 33$.

Anordnungen von Punkten mit vielen Einheitsabständen sind auch für ein altes Färbungsproblem von Nelson, Hadwiger und L. Moser von Interesse. Hier sollen alle Punkte der Ebene mit der kleinstmöglichen Anzahl χ von Farben so gefärbt werden, daß keine zwei Punkte mit Abstand 1 von gleicher Farbe sind. Seit vielen Jahren ist nur $4 \leq \chi \leq 7$ bekannt. Die von uns für f(n) konstruierten Punktmengen benötigen alle höchstens vier Farben.

Der größte Abstand unter n Punkten kann maximal n-mal vorkommen (Pannwitz 1934). Die maximale Anzahl zweitgrößter Abstände ist $\lfloor \frac{3}{2} n \rfloor$ (Vesztergombi 1987).

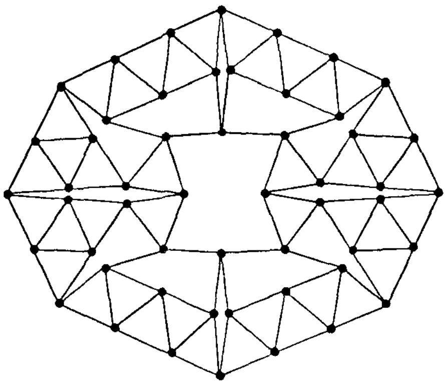
Das maximale Auftreten des kleinsten Abstandes unter n Punkten ist $\lfloor 3n - \sqrt{12n - 3} \rfloor$ (Harborth 1974). Dieses Problem ist zu der Frage nach möglichst vielen Berührpunkten in einer Lagerung von n gleichgroßen Münzen auf einem Tisch gleichwertig. Für $n = 3t^2 + 3t + 1$ wird die Maximalzahl nur angenommen, wenn die Anordnung ein regelmäßiges Sechseck ist.

* Vortrag vor der Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft (Zusammenfassung).

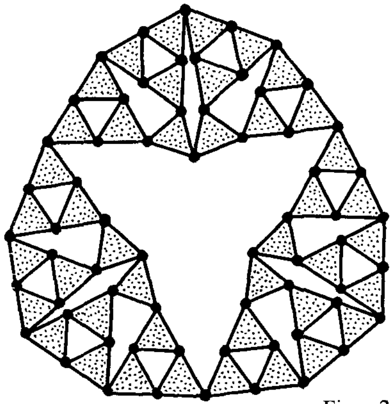
Die maximale Anzahl des zweitgrößten Abstandes unter n Punkten ist asymptotisch $\frac{24}{7}$ n (P. Braß 1992). Dieses gilt aber nur, wenn das Verhältnis von kleinstem zu zweitkleinstem Abstand genau 2 sin 15° ist, in allen anderen Fällen ist die Anzahl < 3n.

Nun soll jeder Punkt zu genau k anderen der Punkte den Abstand 1 haben. Die kleinste Anzahl p(k) von solchen Punkten ist $\leq (\sqrt{3})^k$. Als exakte Werte sind nur p(1) = 2, p(2) = 3, p(3) = 6, p(4) = 9 und p(5) = 18 bekannt.

Wird von zwei sich überkreuzenden Abstandsstrecken jeweils nur eine zugelassen, so existieren für k ≤ 5 keine solchen Punktmengen mit genau k Einheitsabständen zu anderen der Punkte. Die kleinsten Anzahlen $p_1(k)$ von Punkten sind $p_1(1) = 2$, $p_1(2) = 3$, $p_1(3)=8$, und für k = 4 ist bisher nur $p_1(4) \leq 52$ bekannt (siehe Figur 1).



Figur 1



Figur 2

Beispiele von genau vier sich nicht überkreuzenden Abständen von jedem Punkt aus ergeben sich auch, wenn man gleichseitige Einheitsdreiecke so in die Ebene legt, daß jeder Eckpunkt gemeinsamer Eckpunkt von genau zwei Dreiecken ist und keine Überlappungen vorkommen. Bisher ist nur bekannt, daß die kleinste Anzahl von Dreiecken ≤ 42 ist (siehe Figur 2).

Verbietet man, daß zwischen drei Dreiecken nur ein Einheitsdreieck frei bleibt, so benötigt die bisher kleinste bekannte Anordnung bereits 3800 Dreiecke.

Läßt man auch Überlappungen bei solchen Eckpunkt-an-Eckpunkt-Anordnungen von kongruenten regelmäßigen Vielecken zu, so ergibt sich auch die Frage, ob die Anordnungen starr oder beweglich sind. Gibt es zum Beispiel eine solche Anordnung von regelmäßigen Fünfecken, die starr ist?

Univ.-Prof. Dr. Heiko Harborth
Bienroder Weg 47 · 38106 Braunschweig